Exercices et problèmes

24 1. Soit a et b des entiers naturels non nuls tels que $(a+b)\wedge ab = p$, où p est nombre premier.

a. Montrer que p est un diviseur commun de a et b.

b. Montrer que $a\wedge b = p$.

2. On désigne par a et b deux entiers naturels tels que $a \le b$.

a. Résoudre le système $\begin{cases} a\wedge b = 5 \\ a\vee b = 170 \end{cases}$.

b. En déduire les solutions du système $\begin{cases} (a+b)\wedge ab = 5 \\ a\vee b = 170 \end{cases}$.

25 On désigne par x et y deux entiers naturels non nuls tels que $x < y$.

Soit S l'ensemble des couples $(x,\ y)$ tels que $x\wedge y = y - x$.

1. Calculer $363\wedge 484$.

Le couple $(363, 484)$ appartient-il à S ?

2. Soit n un entier naturel non nul.

Le couple $(n, n+1)$ appartient-il à S ?

3. a. Montrer que $(x,\ y)$ appartient à S, si et seulement si, il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$.

b. En déduire que pour tout couple $(x,\ y)$ de S, $x\vee y = k(k+1)(y-x)$.

4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b. En déduire l'ensemble des couples $(x,\ y)$ de S tels que $x\vee y = 228$.

26 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z′ tel que $z' = \frac{3+4i}{5}\overline{z} + \frac{1-2i}{5}$.

1. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b. Quelle est la nature de f ?

2. a. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z′ soit réel.

b. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $4x - 3y = 2$.

c. En déduire les points de D dont les coordonnées sont entières.

3. On considère les points M d'affixe $z = 1 + iy$, où $y \in \mathbb{Z}$.

Déterminer les entiers y tels que $\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z')$ soient entiers.

27 Soit a et b deux entiers.

1. Montrer que si $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$ alors a et b sont premiers entre eux.

On considère l'équation $(E) : (x^2 + xy - y^2)^2 = 1$.

2. Déterminer les solutions entières de (E) telles que $x = y$.

3. Soit (p,q) une solution de (E).

a. Montrer que $(q, p+q)$ est une solution de (E).

b. En déduire que $(p+q, p+2q)$ est une solution de (E).

c. Donner six solutions de (E).

28 Le but de l'exercice est déterminer l'ensemble E des triplets (x,y,z) de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ tels que $x^2 + y^2 = z^2$.

1. Montrer que pour tout couple (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que $a > b$, $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$ est un élément de E.

2. Soit (x,y,z) un élément de E tel que $x\wedge y = 1$.

a. Montrer que $x\wedge z = 1$ et $y\wedge z = 1$.

b. Montrer que x et y ne sont pas tous les deux pairs.

c. Montrer que l'équation $a^2 \equiv 2 \pmod 4$ ne possède pas de solution entière.

d. Montrer que si x et y sont tous les deux impairs alors $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$. En déduire que x et y ne peuvent pas être tous les deux impairs.

e. On suppose que x est impair et y est pair.

Montrer que z est impair et que z-x et z-x sont pairs.

En déduire qu'il existe deux entiers strictement positifs p et q, premiers entre eux, tels que $x = p - q$, $z = p + q$ et $y^2 = 4pq$ et p et q sont des carrés parfaits.

3. En déduire l'ensemble des éléments de E.

4. Donner tous les triplets de E tels que $z \le 18$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn